3.1 正弦序列 2021年2月26日10点03分

例3.1(采样理论介绍) 令是频率为(Hz)的正弦信号.序列是通过在规则区间采样生成的.则,

其中,被称为正弦信号的频率、离散频率或数字频率,是时间区间或采样区间.采样区间的倒数被称为采样频率或采样率,.使用采样率表达,.

为了避免aliasing,采样率的选择必须使得数字频率小于,或

定义(周期性,偶函数和奇函数) 令是连续函数.

如果,则是周期函数,T是它的周期.如果f是正弦函数,则.

如果,则是偶函数.

如果,则是奇函数.

如果,则是Hermitian.

相同的定义同样适用于序列,令是周期为N的无穷序列,

正交正弦序列

现在来考虑向量序列,其中

这实际上是频率的单个周期内的复指数序列.所有这类的向量集合具有下列五个重要属性.

1. 复指数在和上具有周期:

因此,集合中只有N个不同的向量:.

1. 复指数在和上是Hermitian:
2. 向量和具有相同的数字频率,,这是因为.如果N是偶数,仅有个不相同的数字频率（如果N是奇数,则有个）,并且每一个都是的整数倍.
3. N个向量是正交的,因此充满.通过计算内积来验证正交性

分数等于0除非和同时为1,此时k是N的整数倍.应用洛必达法则给出

该符号经常出现以至于我们需要引入更简洁的符号.定义**单位样本[unit-sample]**序列,

同样定义一个周期N的**组合[comb**]序列,

我们则有

和

其中.因此.组合序列仅在时有非样本.因此向量的正交性可简化为

单位样本同样写作,并被称为**克罗内克函数[Kronecker delta]**.

1. 范数.正交集合可以通过除以它们的范数来得到标准正交基集合,

3.2 离散傅里叶变换 2021年3月1日11点56分

定理3.1(离散傅里叶变换) 令是一个向量.则

其中是f的离散傅里叶变换,

向量f和F是DFT对.公式3.11b被称为正向(或分析)变换,公式3.11a被称为逆(或合成)变换.

一般将前向变换写作,,或,逆变换写作或.通常用表示f和F是DFT对.

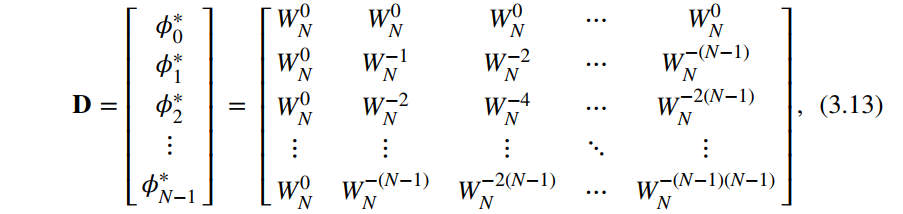
DFT的矩阵形式

通常需要将DFT表达成矩阵-向量乘积.为了方便,定义

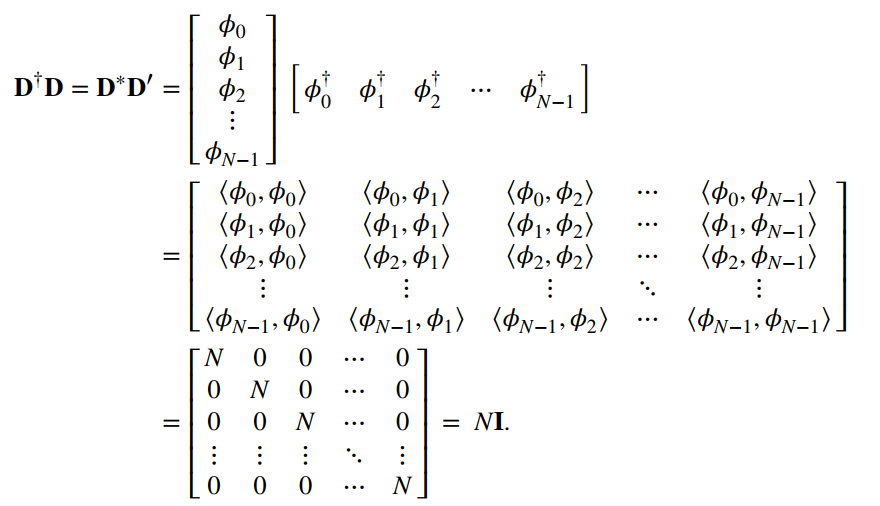
因此m阶DFT基向量为

其中.

收集基向量的复共轭作为矩阵的行,



即,矩阵的实体.矩阵看起来是对称的,因此,此外



因此是可逆的,并且.

现在定义列向量

因此DFT写作

并且逆DFT是

3.3 解释DFT 2021年3月8日10点21分

我们从最简单的复指数序列开始,其中数字频率.它的DFT是

其中.则,使用公式(1.26),得到

我们首先考虑数字频率是的整数倍的情况.这N个数字频率,,经常被称为DFT的bin.位于bin上的信号被称为“入bin”.

将代入到公式(3.17),

其中.

当时,向量是,就是第k个DFT基向量.则,根据正交性(公式3.9),

入bin的余弦序列是两个入bin复指数之和:

其中我们应用了公式3.4,.它的DFT是

入bin的正弦序列是用相同的方式计算的:

定义Dirichlet核:

则,公式3.17可简化为

其中.

除引导相位因素外,DFT与Dirichlet内核成正比,以数字频率为中心,并在bin频率处采样.如果是一个bin频率,则除以外的所有样本都处于零交叉点.这是入bin情况.在出bin情况下,不是的整数倍.没有一个样本出现在零交叉处,并且观察到了与光谱泄漏相关的特征展宽(图3.6).

3.4 DFT属性和定理 2021年3月8日14点19分

定理3.2(线性) 令和是DFT对,并且令是常数.则

定理3.3(Parseval公式) 令和是DFT对.则

也就是,

且

定理3.4(面积定理) 令是DFT对.则

定理3.5(周期性) 令是DFT对.那么f和F都是周期为N的无穷序列.

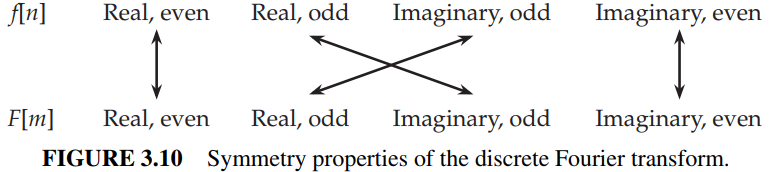
令和分别表示序列f的偶数部分和奇数部分,则

定理3.6(DFT对称) 令是DFT对.则下列命题和相应的逆命题均为真:

如果f是实数,则F是Hermitian:.

如果f是偶(奇)序列,则F是偶(奇)序列.

如果f是实数和偶序列(实数和奇序列),则F是实数和偶序列(虚数和奇序列).



定理3.7(偏移定理) 令是DFT对.则,

定理3.8(卷积定理) 令具有DFT,,并且通过定义乘积.则,的DFT是

其中

被称为F和H的圆形卷积(偏移m-k可以被理解成圆环,或N的模).相似的,

**卷积的矩阵形式,时间关系，这里简单略过**.

定理3.9(零填充) 令是DFT对,并且令,其中.

在时域中,通过零填充定义,

的DFT,写作,包含从F得到的插值,

其中

并且是Dirichlet核.

在频域,通过零填充定义,

的逆DFT,写作,包含从f得到的插值,

其中

定义3.10(零包装) 令是DFT对.通过在f的每个样本后面添加p-1个零得到零包装序列,

则

其中

3.6 离散余弦变换 2021年3月15日10点04分

定理3.11(离散余弦变换) 令.则

向量被称为的DCT.